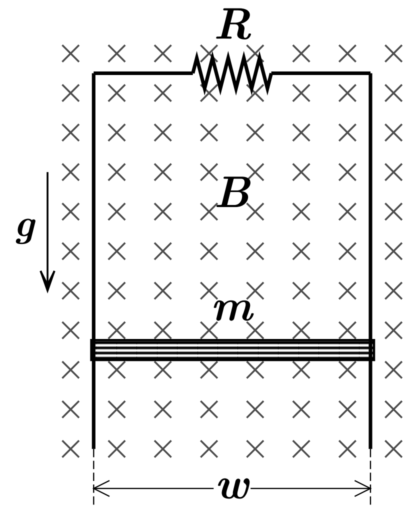
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FS2212 • Segundo Parcial • **35 %**
Miércoles, 11 de Febrero de 2015

Nombre ____________________ Carnet ____________

1. [**9** ***pts.***] Una barra conductora se desliza verticalmente bajo la acción de la gravedad $\vec{g}$, en contacto con dos rieles conductores paralelos, separados entre sí una distancia $\boldsymbol{w}$ igual a la longitud de la barra. Los rieles están conectados por una resistencia $\boldsymbol{R}$. Se supone que la resistencia de los rieles, así como la de la barra, son despreciables. El sistema se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular al plano de los rieles (entrante), como se indica en la figura.



(a) [**4** ***pts.***] Determine la fuerza electromotriz de movimiento $\boldsymbol{\mathcal{E}_{mov}}$ y la corriente inducida en la barra, cuando la barra haya alcanzado una velocidad $\vec{v}$. Indique el sentido de la corriente con una flecha.

(b) [**3** ***pts.***] Determine la fuerza magnética que actúa sobre la barra, y escriba la ecuación diferencial para la velocidad descendente de la barra (ecuación de movimiento), sabiendo que su masa es $\boldsymbol{m}$.

(c) [**2** ***pts.***] Determine la velocidad terminal (constante) de la barra.

Respuestas:

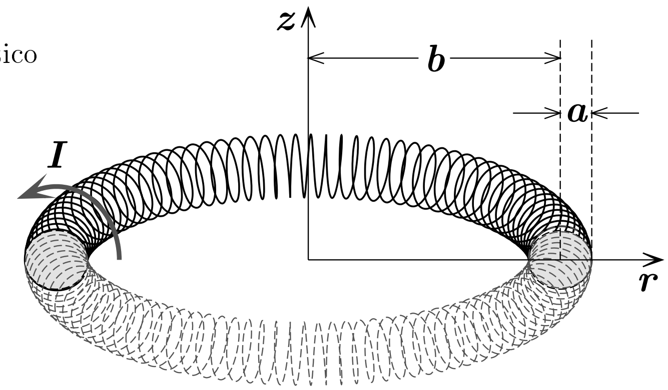
(a) Al estar descendiendo con velocidad $\vec{v}$ ($\downarrow$), el campo magnético $\vec{B}$ ($\otimes$) produce el desplazamiento de los portadores positivos de carga en la barra hacia la derecha de la figura, lo que define el sentido de la corriente inducida a lo largo de la barra ($\rightarrow$). Siendo perpendiculares ambos vectores, la fuerza electromotriz de movimiento será $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{E}_{mov} = wBv,}}$ siendo $\boldsymbol{w}$ la longitud de la barra. La corriente tiene sentido antihorario ($\circlearrowleft$) en el circuito entero, lo que también puede deducirse a partir de la Ley de Lenz.

(b) La corriente inducida en la barra ($\rightarrow$), tiene magnitud $\boldsymbol{I = \mathcal{E}_{mov}/R = wBv/R}$ y es perpendicular al campo uniforme $\vec{B}$. La fuerza sobre la barra tiene magnitud $\boldsymbol{F_B = IwB = w^2B^2v/R}$, y va en sentido ascendente [$\rightarrow \times \otimes = \uparrow$]. La ecuación diferencial para la velocidad descendente de la barra, cuyo peso es $\boldsymbol{mg}$, queda entonces:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \left(\frac{w^2B^2}{R}\right)v \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\frac{dv}{dt} = g - \left(\frac{w^2B^2}{mR}\right)v}} \tag{1}$$

(c) Al ser alcanzado el régimen estacionario ($dv/dt = 0$), la velocidad de la barra será $\boxed{\boldsymbol{v = \left(\frac{mgR}{w^2B^2}\right)}}$

2. [**9** ***pts.***] El solenoide toroidal de la figura tiene $\boldsymbol{N}$ vueltas, sección transversal circular de radio $\boldsymbol{a}$, y su eje central (circular) tiene radio $\boldsymbol{b} \gg \boldsymbol{a}$. A través de cada vuelta, circula una corriente $\boldsymbol{I}$ en el sentido indicado en la figura.



(a) [**3** ***pts.***] Determine la magnitud del campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ en el eje central del solenoide ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}$).

⋆⋆⋆ *Dado que* $\boldsymbol{b} \gg \boldsymbol{a}$*, se puede suponer que el campo adentro del solenoide es* uniforme*, y su magnitud es la que usted calculó en* **(a)**.

(b) [**3** ***pts.***] Determine la autoinductancia $\boldsymbol{L}$ del dispositivo.

(c) [**3** ***pts.***] Calcule la energía magnética total $\boldsymbol{U_B}$ almacenada en el dispositivo.

Respuestas:

(a) Por la simetría del toroide, la sucesión de espiras generan n campo circular $\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B_\phi}\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\phi}}$, paralelo al eje central del solenoide. Aplicando la Ley de Ampère a lo largo de la circunferencia Γ_b ($r = b$):

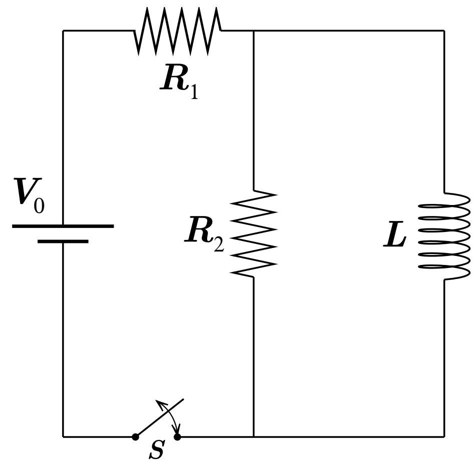
$$\oint_{\Gamma_b} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = 2\pi b B_\phi = \mu_0 N I \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{B_\phi} = \frac{\boldsymbol{\mu_0 N I}}{\boldsymbol{2\pi b}}} \tag{2}$$

(b) Tomando la expresión (2) como valor uniforme del campo, adentro del toroide, el flujo a través de cada espira queda $\Phi_B^1 = BA$, donde $A = \pi a^2$ es el área de la sección transversal del toroide. Luego

$$\boldsymbol{\Phi_B = N\Phi_B^1 = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\cancel{\pi} b}\cancel{\pi} a^2 = LI} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2b}}}$$

(c) Una vez calculada la autoinductancia, la energía magnética almacenada en el dispositivo se obtiene usando la expresión $\boldsymbol{U_B = U_L = \frac{1}{2} L I^2}$ $\quad \Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{U_B = \frac{\mu_0 N^2 a^2 I^2}{4b}}}$

3. [**9** ***pts.***] El interruptor $\boldsymbol{S}$ de la figura, luego de haber estado largo tiempo abierto, se cierra (⤻) en $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$. Las resistencias tienen valores $\boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R_2} = \mathbf{2}\boldsymbol{R}$, respectivamente, y el inductor tiene inductancia $\boldsymbol{L}$. El voltaje de la batería $\boldsymbol{DC}$ es $\boldsymbol{V_0}$.



(a) [**2** ***pts.***] Determine las corrientes $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$ e $\boldsymbol{I_L}$, a través de las resistencias y el inductor, respectivamente, apenas se haya cerrado el interruptor.

(b) [**4** ***pts.***] Determine las corrientes $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$ e $\boldsymbol{I_L}$, a través de las resistencias y el inductor, respectivamente, largo tiempo después que se haya cerrado el interruptor. Haga un gráfico cualitativo de la corriente $\boldsymbol{I_L}$ en el inductor, como función del tiempo.

⋆⋆⋆ *Mucho tiempo después, se abre (⤺) el interruptor $\boldsymbol{S}$, quedando conectados la resistencia $\boldsymbol{R_2}$ y el inductor $\boldsymbol{L}$, solamente. Tomaremos de nuevo ese instante como $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$.*

(c) [**3** ***pts.***] Determine la corriente $\boldsymbol{I_L}$ como función del tiempo, con el interruptor abierto.

Respuestas:

(a) Al haber estado el interruptor largo tiempo abierto, la corriente en el inductor es nula. Al cerrar el interruptor, se mantiene este valor para la misma, y la corriente circula a través de $\boldsymbol{R_1}$ y $\boldsymbol{R_2}$ solamente. Entonces, apenas se haya cerrado el interruptor ($t \approx 0$): $\boxed{\boldsymbol{I_L = 0, I_1 = I_2 = V_0/(R_1 + R_2) = V_0/3R}}$

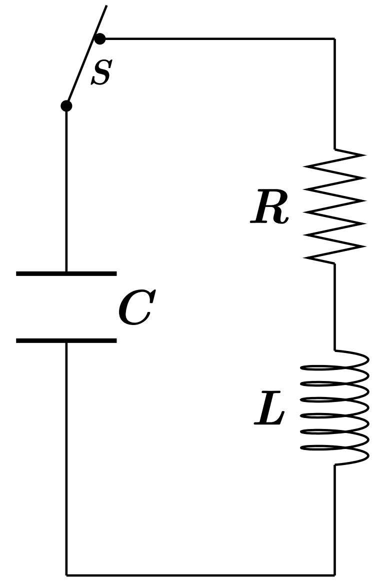
(b) Con el interruptor largo tiempo cerrado, la corriente en el inductor se estabiliza ($\boldsymbol{dI_l/dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}_L} = \mathbf{0}$). Al estar éste en paralelo con la resistencia $\boldsymbol{R_2}$, la corriente a través de ésta será nula (Ley de Ohm). En este régimen estacionario ($t \to \infty$), entonces: $\boxed{\boldsymbol{I_2 = 0, I_L = I_1 = V_0/R_1 = V_0/R}}$

⋆⋆⋆ *Debido a la* Ley de Lenz, *al abrir el interruptor, la corriente es la misma que tenía el inductor inmediatamente antes. Luego, el valor inicial para la misma es $\boldsymbol{I_L^0} = \boldsymbol{V_0/R}$.*

(c) Se trata de un circuito LR de descarga, en el cual toda la energía se disipará a través de la resistencia $\boldsymbol{R_2}$, teniendo la corriente en el inductor el valor asintótico $\boldsymbol{I_L^\infty} = \mathbf{0}$. La ecuación de una malla para el circuito también aporta la solución:

$$L\frac{dI_L}{dt} = -R_2 I_L = -2RI_L \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{I_L(t) = \left(\frac{V_0}{R}\right) e^{-2Rt/L}}} \tag{3}$$

4. [**8** ***pts.***] El capacitor $\boldsymbol{C}$ de la figura tiene carga $\boldsymbol{Q_0}$, antes que se cierre el interruptor $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{t=0}$. Los valores de la resistencia $\boldsymbol{R}$, la inductancia $\boldsymbol{L}$ y la capacitancia $\boldsymbol{C}$ son conocidos.



(a) [**4** ***pts.***] Escriba la expresión para la energía total (eléctrica y magnética) almacenada en el circuito, para cualquier instante posterior al cierre del interruptor ($\boldsymbol{t>0}$). Explique brevemente por qué la energía no puede ser constante, y escriba la expresión para su derivada respecto al tiempo. A continuación, deduzca la ecuación diferencial que satisface la carga del capacitor.

⋆⋆⋆ *Por simple inspección, compruebe que la solución a dicha ecuación es:*

$$\boxed{\boldsymbol{Q(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi_0)}},$$

donde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\omega}$ *y* $\boldsymbol{\phi_0}$ *son constantes.*

(c) [**4** ***pts.***] Sabiendo que, en $\boldsymbol{t=0}$, la corriente es $\boldsymbol{I_0=0}$, determine las constantes $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{\phi_0}$, en función de $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\omega}$.

Respuestas:

(a) La energía total almacenada en el circuito viene dada por la expresión:

$$U_{TOT} = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\,, \tag{4}$$

la cual no puede ser constante: la resistencia disipa energía en forma de calor (efecto Joule). Luego:

$$\frac{dU_{TOT}}{dt} = LI\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = -I^2R\,, \tag{5}$$

siendo $I = dQ/dt$. Sustituyendo la corriente, se tiene la ecuación diferencial para la carga del condesador:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = 0}} \tag{6}$$

(b) A partir de la solución propuesta a la ecuación diferencial, $\boldsymbol{Q(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi_0)}$, basta escoger $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{\phi_0}$, de manera que $\boldsymbol{Q(0) = Q_0}$ e $\boldsymbol{I(0) = \big(dQ/dt\big)_0 = 0}$:

$$I(0) = A(-\alpha\cos\phi_0 - \omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0) = 0 \implies \boxed{\boldsymbol{\tan\phi_0 = -\frac{\alpha}{\omega}}}$$

$$Q(0) = A\cos\phi_0 = Q_0 \implies A = \frac{Q_0}{\cos\phi_0} \implies \boxed{\boldsymbol{A = \frac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}Q_0}}$$

⋆⋆⋆ Si substituimos la solución propuesta en la ecuación diferencial (6), obtendremos la relación de las constantes $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\omega}$ con los parámetros originales ($\boldsymbol{L, R, C}$) del circuito:

$$\begin{aligned} \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q \quad &= \quad \left[(\alpha^2-\omega^2) - \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC}\right]\boldsymbol{Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi_0)} \quad + \\ &+ \quad \left(2\alpha\omega - \frac{R}{L}\omega\right)\boldsymbol{Ae^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)} \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Por ser $\boldsymbol{Ae^{-\alpha t} \neq 0}$ y **sen** y **cos** mutuamente ortogonales: $\boxed{\boldsymbol{\alpha = \frac{R}{2L}}} \implies \boxed{\boldsymbol{\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$

La condición para que haya oscilaciones amortiguadas es $\boxed{\boldsymbol{4L/R = 4\tau_L > \tau_C = RC\,.}}$